UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01178991 4

Sretinskiĭ, Leonid Nikolaevich
Rasprostranenie voln v uprugom poluprostranstve...

QA
927
S744

LIBRARY
APR 21 19[illegible]
UNIVERSITY OF TORONTO

LIBRARY
MAR 29 1966
UNIVERSITY OF TORONTO
1062125

QA
927
S744

Sretenskiĭ, Leonid Nikolaevich

Rasprostranenie voln v uprugom poluprostranstve...

Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПРИЛИВНОЙ ВОЛНЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ БАССЕЙНА КРУГОВОЙ ФОРМЫ

§ 1. Допустим, что к поверхности упругого полупространства прикладываются нормальные напряжения, являющиеся периодическими функциями времени. Мы будем предполагать, что эти напряжения отличны от нуля лишь внутри некоторой области, имеющей форму круга. Результаты, получающиеся при рассмотрении этой задачи теории упругости, дадут возможность проследить за распространением упругих волн, возникающих при движении приливной волны, если мы будем считать, что приложенные нормальные напряжения равны величинам гидростатического давления, развивающегося при прохождении приливных волн.

Предположим, что поверхность, подверженная давлению, есть плоскость $z=0$. Возьмем цилиндрическую систему координат, взяв в качестве ее оси OZ — вертикаль, идущую вверх, и располагая координаты r и φ в плоскости $z=0$.

Упругое смещение $\vec{V}$ можно разложить на две части, полагая

$$\vec{V}=\vec{V}'-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\Phi,$$

причем скаляр Φ и вектор $\vec{V}'$ будут интегралами уравнений:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{1}{h^2}\Delta\Phi,$$

$$\frac{\partial^2\vec{V}'}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varkappa^2}\overrightarrow{\operatorname{curl}}\,\overrightarrow{\operatorname{curl}}\,\vec{V}';$$

$$\operatorname{div}\vec{V}'=0.$$

Эта общая система уравнений теории упругих волн может быть переписана в следующем виде, используя цилиндрические координаты:

$$h^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\Delta\Phi, \tag{1}$$

$$\varkappa^2\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}=\Delta u'-\frac{u'}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v'}{\partial\varphi}, \tag{2}$$

$$\varkappa^2\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}=\Delta v'-\frac{v'}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u'}{\partial\varphi}, \tag{3}$$

$$\varkappa^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = \Delta w', \tag{4}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial \varphi} + \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{u'}{r} = 0. \tag{5}$$

В этих уравнениях величины u', v', w' суть проекции смещения $\vec{V}'$ соответственно на радиус — вектор r, на перпендикуляр к нему и на ось OZ.

Определим решение этой системы уравнений, обладающее данной частотой σ и удовлетворяющее следующим пограничным условиям при $z = 0$:

$$\tau_{zr} = 0,\ \tau_{z\varphi} = 0;\ \tau_{zz} = \begin{cases} F(r, \varphi)\cdot e^{i\sigma t}, & r < a \\ 0 \qquad\qquad\ , & r > a. \end{cases}$$

Функция $F(r, \varphi)$ считается известной; символ τ служит для обозначения компоненты напряжения. Эти пограничные условия могут быть записаны через величины Φ, u', v', w' так:

$$\tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{\partial u'}{\partial z} - 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\,\partial z}\right) = 0; \quad \tau_{z\varphi} = \mu\left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w'}{\partial \varphi} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi\,\partial z}\right) = 0 \tag{6}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\left(\frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) - \lambda\Delta\Phi = \begin{cases} F(r, \varphi)\, e^{i\sigma t}, & r < a, \\ 0 \qquad\qquad\ , & r > a. \end{cases} \tag{7}$$

При решении задачи мы должны принять еще во внимание условия излучения — все упругие волны должны уходить в бесконечность.

§ 2. Рассмотрим сначала уравнения (2) и (3). Найдем частное решение этих уравнений следующего вида:

$$u' = e^{i(\sigma t + s\varphi) + kz} U(r), \quad v' = e^{i(\sigma t + s\varphi) + kz} V(r),$$

где k есть любое положительное число, а s есть целое положительное число. Неизвестные функции $U(r)$ и $V(r)$ будут удовлетворять системе уравнений:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{s^2+1}{r^2}\right)U - \frac{2is}{r^2}V = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{s^2+1}{r^2}\right)V + \frac{2is}{r^2}U = 0,$$

здесь

$$\alpha^2 = k^2 + \varkappa^2\sigma^2.$$

Общее решение этой системы уравнений, обладающее конечными значениями при $r = 0$, записывается так:

$$U = CJ_{s+1}(\alpha r) + DJ_{s-1}(\alpha r),$$

$$iV = CJ_{s+1}(\alpha r) - DJ_{s-1}(\alpha r);$$

здесь C и D суть две произвольные постоянные. Отсюда мы получаем такие частные решения уравнений (2) и (3):

$$u' = e^{i(\sigma t + s\varphi) + kz}\,[CJ_{s+1}(\alpha r) + DJ_{s-1}(\alpha r)],$$

$$iv' = e^{i(\sigma t + s\varphi) + kz}\,[CJ_{s+1}(\alpha r) - DJ_{s-1}(\alpha r)]. \tag{8}$$

Возьмем теперь уравнение (4). Это уравнение обладает частным решением следующего вида:

$$w' = Ae^{i(\sigma t+s\varphi)+kz} J_s(\alpha r), \tag{9}$$

где A есть произвольная постоянная.

Обратимся теперь к уравнению (5). Подставляя в это уравнение вместо u', v', w' их значения (8) и (9), мы находим, что это уравнение будет удовлетворяться, если постоянные C, D связать уравнением:

$$\alpha(C - D) + Ak = 0. \tag{10}$$

Возьмем, наконец, уравнение (1). Нетрудно установить, что это уравнение будет иметь частное решение следующего вида:

$$\Phi = Be^{i(\sigma t+s\varphi)+k'z} J_s(\alpha r), \tag{11}$$

где B есть произвольная постоянная величина, а k' определяется формулой:

$$k'^2 = \alpha^2 - \sigma^2 h^2.$$

Составим теперь для $z = 0$ значения напряжений τ_{zr}, $\tau_{z\varphi}$, τ_{zz}, отвечающие частным решениям (8), (9), (11). Пользуясь формулами (6) и (7) для этих напряжений, получаем, отбрасывая общий показательный множитель:

$$\tau_{zr} = \mu\left[\left(\frac{1}{2}\alpha A + kD - \alpha k'B\right)J_{s-1}(\alpha r) - \left(\frac{1}{2}\alpha A - kC - \alpha k'B\right)J_{s+1}(\alpha r)\right],$$

$$\tau_{z\varphi} = \mu i\left[\left(\frac{1}{2}\alpha A + kD - \alpha k'B\right)J_{s-1}(\alpha r) + \left(\frac{1}{2}\alpha A - kC - \alpha k'B\right)J_{s+1}(\alpha r)\right],$$

$$\tau_{zz} = -\frac{C}{\alpha k k'}\left[4\mu k k'\alpha^2 + (\alpha^2 + k^2)(\lambda h^2\sigma^2 - 2\mu k'^2)\right]J_s(\alpha r). \tag{12}$$

Если постоянные A, B, C, D связать зависимостями

$$\frac{1}{2}\alpha A + kD - \alpha k'B = 0, \quad \frac{1}{2}\alpha A - kC - \alpha k'B = 0, \tag{13}$$

то напряжения τ_{zr} и $\tau_{z\varphi}$ будут равны нулю на всей плоскости $z = 0$.

Решая совместно уравнения (10) и (13) относительно A, B, D, находим

$$A = -\frac{2\alpha}{k}C, \quad B = -\frac{\alpha^2 + k^2}{\alpha k k'}C, \quad D = -C.$$

Отсюда частные решения (8), (9), (11) и формула (12) примут вид:

$$u' = -2CJ_s'(\alpha r)\, e^{i(\sigma t+s\varphi)+kz}, \quad v' = -\frac{2is}{\alpha r}CJ_s(\alpha r)\, e^{i(\sigma t+s\varphi)+kz},$$

$$w' = -\frac{2\alpha}{k}CJ_s(\alpha r)\, e^{i(\sigma t+s\varphi)+kz}, \quad \Phi = -\frac{\alpha^2 + k^2}{\alpha k k'}CJ_s(\alpha r)\, e^{i(\sigma t+s\varphi)+k'z}. \tag{14}$$

$$(\tau_{zz})_{z=0} = \frac{\mu}{\alpha k k'}CSJ_s(\alpha r),$$

где

$$S = (2k^2 + \varkappa^2\sigma^2)^2 - 4kk'(k^2 + \varkappa^2\sigma^2). \tag{15}$$

§ 3. Перейдем теперь к решению поставленной задачи. Нам требуется найти такие функции u', v', w', Φ, чтобы при $z=0$ напряжения τ_{zr}, $\tau_{z\varphi}$ были равны нулю, а напряжение τ_{zz} определялось формулой

$$\tau_{zz} = \begin{cases} F(r, \varphi)\, e^{i\sigma t}, & r < a; \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Мы примем, что функция $F(r, \varphi)$ имеет следующий частный вид:

$$F(r, \varphi) = f(r)\, e^{is\varphi}.$$

При решении этой задачи будем основываться на известной формуле теории функций Бесселя:

$$\int_0^\infty \alpha\, d\alpha \int_0^\infty \xi J_s(\alpha\xi)\, J_s(\alpha r)\, f(\xi)\, d\xi = f(r).$$

Для применения этой формулы будем рассматривать константу C, входящую в формулы (14), как некоторую функцию параметров α и ξ, определяемую так:

$$C = 0 \text{ для } \xi > a; \quad C = \frac{\alpha^2 k k'}{\mu} \frac{\xi f(\xi)}{S} J_s(\alpha\xi) \text{ для } \xi < a.$$

Заменим в формулах (14) величину C этим ее значением и проинтегрируем результаты по параметрам α и ξ соответственно в пределах $0, \infty$ и $0, a$. Тогда решение поставленной задачи будет даваться следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} u' &= -\frac{2}{\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 k k'}{S} e^{kz} J_s'(\alpha r)\, d\alpha \int_0^a \xi J_s(\alpha\xi)\, f(\xi)\, d\xi \cdot e^{i(\sigma t + s\varphi)}, \\ v' &= -\frac{2is}{\mu r} \int_0^\infty \frac{\alpha k k'}{S} e^{kz} J_s(\alpha r)\, d\alpha \int_0^a \xi J_s(\alpha\xi)\, f(\xi)\, d\xi \cdot e^{i(\sigma t + s\varphi)}, \\ w' &= -\frac{2}{\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha^3 k'}{S} e^{kz} J_s(\alpha r)\, d\alpha \int_0^a \xi J_s(\alpha\xi)\, f(\xi)\, d\xi \cdot e^{i(\sigma t + s\varphi)}, \\ \Phi &= -\frac{1}{\mu} \int_0^\infty \frac{\alpha(\alpha^2 + k^2)}{S} e^{k'z} J_s(\alpha r)\, d\alpha \int_0^a \xi J_s(\alpha\xi)\, f(\xi)\, d\xi \cdot e^{i(\sigma t + s\varphi)}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Величина S, входящая в эти формулы, является функцией параметра α и определяется формулой (15), которую можно переписать следующим образом, принимая во внимание значения величин k и k':

$$S(\alpha) = (2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2)^2 - 4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2}\, \sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}. \quad (17)$$

Надо отметить, что по соглашению $\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2} > 0$ для $|\alpha| > \varkappa\sigma$ и $\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}$ для $|\alpha| > h\sigma$; для других значений α величины корней определяются по непрерывности и во всем дальнейшем берутся значения этих корней с положительной действительной частью.

§ 4. Общие формулы предыдущего параграфа принимают особенно простой вид, доступный для всестороннего исследования, если нормальные напряжения обусловлены прохождением приливной волны полусуточного периода. Для полусуточного прилива $s = 2$, а высота поднятия воды ζ в круглом бассейне равна величине статического прилива, т. е.

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{i(\sigma t + 2\varphi)}.$$

Отсюда получаем для τ_{zz} такое выражение:

$$\tau_{zz} = K \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{i(\sigma t + 2\varphi)},$$

где K есть некоторая постоянная величина.

Таким образом, для волн, образованных полусуточным приливом, мы имеем:

$$f(r) = K \left(\frac{r}{a}\right)^2.$$

Интеграл по переменному ξ, входящий в формулы (16), может быть вычислен; мы имеем:

$$\int_0^a \xi J_2(\alpha\xi) f(\xi)\, d\xi = \frac{a}{\alpha} K J_3(a\alpha).$$

Отсюда формулы (16) могут быть переписаны так:

$$\left.\begin{aligned}
u' &= -\frac{2a}{\mu} K \int_0^\infty \frac{\alpha k k'}{S} e^{kz} J_2'(\alpha r) J_3(\alpha a)\, d\alpha, \\
v' &= -\frac{4ia}{\mu r} K \int_0^\infty \frac{kk'}{S} e^{kz} J_2(\alpha r) J_3(\alpha a)\, d\alpha, \\
w' &= -\frac{2a}{\mu} K \int_0^\infty \frac{\alpha^2 k'}{S} e^{kz} J_2(\alpha r) J_3(\alpha a)\, d\alpha, \\
\Phi &= -\frac{a}{\mu} K \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + k^2}{S} e^{k'z} J_2(\alpha r) J_3(\alpha a)\, d\alpha.
\end{aligned}\right\} \cdot e^{i(\sigma t + 2\varphi)} \qquad (18)$$

Преобразуем эти формулы к новому виду; во-первых, заменим в формуле для $u' J_2'(\alpha r)$ через $\frac{1}{2}[J_1(\alpha r) - J_3(\alpha r)]$, а затем, во всех формулах, увеличивая область интегрирования добавлением участка от $-\infty$ до 0, заменим, как это обычно делается, функции Бесселя от аргумента αr функциями Ганкеля первого рода, имея в виду, что

$$H_p^2(\rho e^{-\pi i}) = e^{(p+1)\pi i} H_p^{(1)}(\rho),$$
$$H_p^{(1)}(\rho e^{\pi i}) = e^{-(p+1)\pi i} H_p^{(2)}(\rho).$$

Мы получим тогда вместо формул (18) такие формулы:

$$\left.\begin{aligned} u' &= -\frac{aK}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha kk'}{S}e^{kz}J_3(\alpha a)\,H_1'^{(1)}(\alpha r)\,d\alpha,\\ v' &= -\frac{2ia}{\mu r}K\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kk'}{S}e^{kz}J_3(\alpha a)\,H_2^{(1)}(\alpha r)\,d\alpha,\\ w' &= -\frac{aK}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2k'}{S}e^{kz}J_3(\alpha a)\,H_2^{(1)}(\alpha r)\,d\alpha,\\ \Phi &= -\frac{aK}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2+k^2}{S}e^{k'z}J_3(\alpha a)\,H_2^{(1)}(\alpha r)\,d\alpha. \end{aligned}\right\}\cdot e^{i(\sigma t+2\varphi)} \qquad (19)$$

Отметим, что интегрирование во всех этих формулах ведется по действительной оси от $-\infty$ до $-\varepsilon$, затем по полуокружности радиуса ε, с центром в начале координат и расположенной в верхней полуплоскости и затем по действительной оси от точки ε до ∞. Этот путь интегрирования должен, кроме того, обходить точки Рели, которые получаем, приравнивая нулю функцию S. Соответствующие значения α дадут нам поверхностные волны, представляющие собою собственные колебания полупространства с данной частотой σ и с периодом π по отношению к углу φ. Эти волны, которые можно считать взятыми с произвольной амплитудой, мы устраняем из рассмотрения.

§ 5. Для изучения колебаний полупространства, описываемых формулами (19), введем вместо z и r новые переменные R и ω, полагая

$$z = -R\sin\omega, \quad r = R\cos\omega;$$

эти переменные являются, таким образом, полярными координатами точки на плоскости проходящей через ось OZ и образовывают, кроме того, вместе с углом φ полярную систему координат в пространстве.

Возьмем сначала первую формулу из системы (19) и запишем ее так:

$$u' = -\frac{aK}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha kk'}{S}J_3(\alpha a)\,e^{-kR\sin\omega}H_1'^{(1)}(\alpha R\cos\omega)\,d\alpha.$$

Если мы будем считать, что радиус R есть величина большая, а угол ω принимает значения в пределах от 0 до $\frac{1}{2}\pi-\omega_0$, где ω_0 произвольно малое число, то, в силу указанного выше выбора пути интеграции, мы можем под знаком интеграла заменить функцию Ганкеля ее асимптотическим выражением:

$$H_1'^{(1)}(\alpha R\cos\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha R\cos\omega}}\,e^{i\left(\alpha R\cos\omega-\frac{3}{4}\pi\right)}.$$

Таким путем мы находим для u' следующее выражение:

$$u' = \frac{aK}{\mu}e^{\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi R\cos\omega}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kk'\sqrt{\alpha}}{S}J_3(\alpha a)\,e^{RN(\alpha,\omega)}\,d\alpha, \qquad (20)$$

где

$$N(\alpha, \omega) = \alpha i \cos\omega - \sin\omega \sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2}. \tag{21}$$

Аналогично:

$$v' = \frac{2iaK}{\mu R\cos\omega}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{2}{\pi R\cos\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kk'}{\sqrt{\alpha}\, S} J_3(\alpha a)\, e^{RN(\alpha,\omega)}\, d\alpha, \tag{22}$$

$$w' = \frac{aK}{\mu}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{2}{\pi R\cos\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 k'}{\sqrt{\alpha}\, S} J_3(\alpha a)\, e^{RN(\alpha,\omega)}\, d\alpha, \tag{23}$$

$$\Phi = \frac{aK}{2\mu}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{2}{\pi R\cos\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 + k^2}{\sqrt{\alpha}\, S} J_3(\alpha a)\, e^{RM(\alpha,\omega)}\, d\alpha, \tag{24}$$

где

$$M(\alpha, \omega) = \alpha i \cos\omega - \sin\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}. \tag{25}$$

Для получения асимптотических формул, изображающих величины u', v', w', Φ при больших R, надо исследовать функции $M(\alpha, \omega)$ и $N(\alpha, \omega)$, как функции комплексного переменного α. К этому мы сейчас и обратимся.

§ 6. Рассмотрим сначала функцию $M(\alpha, \omega)$. Эта функция имеет две точки ветвления:

$$\alpha_1 = \sigma h, \qquad \alpha_2 = -\sigma h.$$

При рассмотрении интеграла (24) мы берем ту ветвь многозначной функции $\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2 h^2}$, которая при действительных α, больших чем σh, по абсолютной величине, обладает действительными и положительными значениями. Благодаря этому путь интегрирования в интеграле (24) должен идти по нижнему берегу разреза $-\infty$, $-\sigma h$ и по верхнему берегу разреза σh, ∞. Между точками $-\sigma h$ и σh функция $M(\alpha, \omega)$ имеет чисто мнимые значения, обращаясь в нуль при $\alpha = \sigma h \sin\omega$. Производная $M'_\alpha(\alpha, \omega)$ равна нулю при $\alpha' = -\sigma h\cos\omega$, причем

$$M(\alpha', \omega) = -i\sigma h; \quad M''_{\alpha^2}(\alpha', \omega) = \frac{i}{\sigma h \sin^2\omega}.$$

На некоторой линии (Г), проходящей через точку α' и встречающей ось абсцисс под углом 45°, мнимая часть функции $M(\alpha, \omega)$ будет сохранять постоянное значение $-\sigma h$, а действительная часть будет меняться от 0 до $-\infty$ в обе стороны от точки α'.

Для получения асимптотической оценки интеграла (24) мы можем интеграцию выполнять по кривой (Г), и асимптотическая оценка этого интеграла будет:

$$\Phi = \frac{i(2h^2\cos^2\omega - \varkappa^2)\, J_3(a\sigma h\cos\omega)\, e^{-i\sigma hR}}{\sigma^2\sqrt{\sigma h\cos\omega}\,[(\varkappa^2 - 2h^2\cos^2\omega)^2 + 2h^3\sin 2\omega\cos\omega\sqrt{\varkappa^2 - h^2\cos^2\omega}]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-R\gamma^2}{2\sigma h\sin^4\omega}}\, d\gamma.$$

Выполняя здесь интеграцию, мы находим после преобразований следующее окончательное асимптотическое выражение функции Φ, с восстановленным множителем $e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$:

$$\Phi = \frac{aKi}{\mu\varkappa^2\sigma^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\omega \cdot \left(\frac{2h^2}{\varkappa^2}\cos^2\omega - 1\right) J_3(a\sigma h\cos\omega)}{\left(1 - 2\frac{h^2}{\varkappa^2}\cos^2\omega\right)^2 + 2\frac{h^3}{\varkappa^3}\sin 2\omega\cos\omega\sqrt{1 - \frac{h^2}{\varkappa^2}\cos^2\omega}} \times$$

$$\times \frac{e^{-i(\sigma hR - \sigma t - 2\varphi)}}{R}. \qquad (26)$$

Надо отметить, что при получении этой формулы следует считать, что угол ω не равен нулю, а более точно — надо предполагать угол ω бóльшим, чем наперед заданное малое число ε. Это ограничение вытекает из того, что при $\omega = 0$ точка α' совпадает с точкой ветвления $-\sigma h$.

Рассмотрим затем формулы (20), (22) и (23). Для нахождения асимптотических выражений величин, определяемых этими формулами, рассмотрим функцию $N(\alpha, \omega)$ в зависимости от комплексного переменного α. Эта функция имеет две точки ветвления

$$\alpha_1 = \sigma\varkappa, \quad \alpha_2 = -\sigma\varkappa,$$

и мы разрежем плоскость переменного α по линиям $-\infty$, α_2 и α_1, ∞, проводя притом интеграцию по нижнему берегу первого разреза и по верхнему берегу второго разреза. Производная $N'_\alpha(\alpha, \omega)$ равна нулю при $\alpha' = -\sigma\varkappa\cos\omega$, причем $N(\alpha', \omega) = -i\sigma\varkappa$ и $N''_{\alpha^2}(\alpha', \omega) = \frac{i}{\varkappa\sigma\sin^2\omega}$.

Применяя метод перевала, мы сможем на основе этих данных о функции $N(\alpha, \omega)$ найти асимптотическое выражение величин u', v', w':

$$u' = \frac{2aKi}{\mu\varkappa\sigma} \frac{\sin^2\omega\sqrt{\cos^2\omega - \frac{h^2}{\varkappa^2}}\, J_3(a\sigma\varkappa\cos\omega)}{\cos^2 2\omega - 2i\sin 2\omega\cos\sqrt{\cos^2\omega - \frac{h^2}{\varkappa^2}}} \cdot \frac{e^{-i(\sigma\varkappa R - \sigma t - 2\varphi)}}{R},$$

$$v' = -\frac{4aKi}{\mu\varkappa^2\sigma^2} \frac{\operatorname{tg}^2\omega\sqrt{\cos^2\omega - \frac{h^2}{\varkappa^2}}\, J_3(a\sigma\varkappa\cos\omega)}{\cos^2 2\omega - 2i\sin 2\omega\cos\omega\sqrt{\cos^2\omega - \frac{h^2}{\varkappa^2}}} \cdot \frac{e^{-i(\sigma\varkappa R - \sigma t - 2\varphi)}}{R^2},$$

$$w' = \frac{aKi}{\mu\varkappa\sigma} \cdot \frac{\sin 2\omega\sqrt{\cos^2\omega - \frac{h^2}{\varkappa^2}}\, J_3(a\sigma\varkappa\cos\omega)}{\cos^2 2\omega - 2i\sin 2\omega\cos\omega\sqrt{\cos^2\omega - \frac{h^2}{\varkappa^2}}} \cdot \frac{e^{-i(\sigma\varkappa R - \sigma t - 2\varphi)}}{R}.$$

Составим по этим формулам величины поперечных смещений по трем взаимно перпендикулярным направлениям, образуемым увеличивающимися R, ω и φ; обозначим эти смещения соответственно через u'_R, v'_ω, w'_φ.

Мы получим:

$$u'_R = 0; \quad v'_\omega = -\frac{2aK}{\mu\varkappa\sigma} \cdot \frac{\sin\omega\cdot\sqrt{\frac{h^2}{\varkappa^2} - \cos^2\omega}\cdot J_3(a\sigma\varkappa\cos\omega)}{\cos^2 2\omega + 2\sin 2\omega\cos\omega\sqrt{\frac{h^2}{\varkappa^2} - \cos^2\omega}} \times$$

$$\times \frac{e^{-i(\sigma\varkappa R - \sigma t - 2\varphi)}}{R}; \qquad (27)$$

что же касается w'_φ, то его можно положить равным нулю, так как оно изменяется обратно пропорционально квадрату R. Заметим, кроме того, что радикал $\sqrt{\frac{h^2}{\varkappa^2} - \cos^2\omega}$ определяется как число действительное и положительное для $\cos\omega = 0$.

Таким образом, при больших R смещения частиц упругого полупространства, обязанные распространению поперечных волн, будут наблюдаться лишь в плоскости меридиана частицы и притом лишь в направлении, перпендикулярном к радиусу-вектору частицы.

Из формулы (27) следует далее, что для углов ω, удовлетворяющих неравенству:

$$\cos^2\omega < \frac{h^2}{\varkappa^2}$$

колебание частиц полупространства, обладающих одинаковыми R и φ, находятся всегда в одной фазе (или в противофазе); для углов же ω, удовлетворяющих противоположному неравенству, фазы колебаний частиц упругой среды будут, при данных R и φ, зависеть от угла ω и, следовательно, волновые поверхности приобретают довольно сложный вид.

Отметим, что при взятом определении корня $\sqrt{\frac{h^2}{\varkappa^2} - \cos^2\omega}$ знаменатель формулы (27) не обращается в нуль ни для одного значения ω. В этом можно убедиться, вернувшись к первоначальному выражению (17) функции S, равенство нулю которой дает уравнение для определения скорости волн Рэли V. Приравнивая нулю указанный знаменатель, мы найдем:

$$\cos^2\omega = \frac{1}{\varkappa^2 V^2},$$

но $V < \frac{1}{\varkappa}$.

Рассмотрим теперь волны, определяемые потенциалом продольных смещений (26). Мы имеем с принятой степенью приближения:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial R} = -\frac{aKh}{\mu\varkappa^2\sigma} \cdot \frac{\operatorname{tg}\omega\left(\frac{2h^2}{\varkappa^2}\cos^2\omega - 1\right) J_3(a\sigma h\cos\omega)}{\left(\frac{2h^2}{\varkappa^2}\cos^2\omega - 1\right)^2 + 2\frac{h^3}{\varkappa^3}\sin 2\omega\cos\omega\sqrt{1 - \frac{h^2}{\varkappa^2}\cos^2\omega}} \times$$

$$\times \frac{e^{-(\sigma hR - \sigma t - 2\varphi)}}{R}$$

$$-\frac{1}{R\cos\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0; \qquad -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega} = 0. \tag{28}$$

Отсюда мы видим, что при распространении потенциальной волны будут наблюдаться, на большом расстоянии от центра бассейна, смещения лишь по радиусу R. При данных R и φ колебание всех частиц находится в одной фазе (или в противофазе); амплитуды же колебаний зависят от угла ω.

Из формул (27) и (28) можно вывести далее общее заключение, что частицы упругого полупространства описывают, вдалеке от бассейна, эллипсы, оси которых располагаются по радиусу-вектору частицы и по перпендикуляру к нему, проводимому в плоскости меридиана, содержащего рассматриваемую частицу.

Полученные нами асимптотические формулы пригодны для вычисления соответствующих величин при углах ω, не достигающих $\frac{1}{2}\pi$; кроме того, значения угла ω, близкие к 0, должны быть также исключены для возможности применения метода перевала. Таким образом, обозначая через ω_0 и ω_1 два произвольно малых угла, мы сможем определить область приложимости наших асимптотических формул следующими неравенствами:

$$\omega_1 < \omega < \frac{1}{2}\pi - \omega_0.$$

Следовательно, для определения смещения точек поверхности полупространства наши формулы не пригодны. Соответствующие формулы можно получить, рассматривая формулы (18) для $z = 0$ и r большого.

§ 7. Предыдущий анализ оставляет в стороне наиболее интересный случай, отвечающий точкам, принадлежащим к свободной поверхности полупространства. В этом параграфе мы рассмотрим этот случай, основываясь на некотором видоизменении метода асимптотической оценки интегралов, содержащих большой параметр.

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty f(\tau) K_s(\tau r)\, d\tau, \tag{29}$$

где K_s есть символ функции Бесселя порядка s и второго рода от мнимого аргумента. Накладывая на функцию $f(\tau)$ те же ограничения, как и при получении асимптотического разложения интеграла

$$\int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau r}\, d\tau$$

при больших r, можно показать, что интеграл (29) может быть представлен следующим асимптотическим разложением:

$$\int_0^\infty f(\tau) K_s(\tau r)\, d\tau \cong \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{r^{\frac{m}{k}}} a_m,$$

где

$$\gamma_m = \int_0^\infty \xi^{\frac{m}{k}-1} K_s(\xi)\, d\xi$$

и a_m суть коэффициенты разложения функции $f(\tau)$ в ряд вида:

$$f(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \tau^{\frac{m}{k}-1}.$$

Аналогичное асимптотическое разложение может быть установлено и для интеграла

$$\int_0^{-\infty} f(\tau) H_s^{(2)}(i\tau r)\, d\tau;$$

мы имеем:

$$\int_0^{-\infty} f(\tau)\, H_s^{(2)}(i\tau r)\, d\tau \cong \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_m}{r^{\frac{m}{k}}}\, a_m,$$

где

$$\delta_m = \int_0^{-\infty} \xi^{\frac{m}{k}-1} H_s^{(2)}(i\xi)\, d\xi.$$

§ 8. Возьмем формулы (19) и положим в них $z = 0$. Рассмотрим сначала выражение функции Φ; мы получим:

$$\Phi = -\frac{aK}{\mu} e^{i(\sigma t + 2\varphi)} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 + k^2}{S} J_2(\alpha r)\, J_3(\alpha a)\, d\alpha. \tag{30}$$

Найдем асимптотическое разложение этого интеграла для больших значений r. Обозначая интеграл этой формулы через $Q(r)$, положим:

$$Q(r) = Q^{(1)}(r) + Q^{(2)}(r), \tag{31}$$

где

$$Q^{(1)}(r) = \int_0^{\infty} F(\alpha)\, H_2^{(1)}(\alpha r)\, d\alpha,$$

$$Q^{(2)}(r) = \int_0^{\infty} F(\alpha)\, H_2^{(2)}(\alpha r)\, d\alpha,$$

причем

$$F(\alpha) = \frac{\alpha^2 + k^2}{2S} J_3(\alpha a).$$

Возьмем сначала интеграл $Q^{(1)}(r)$; имея в виду поведение функции $H_2^{(1)}$ для чисто мнимых значений аргумента и связь этой функции с функцией K_2 мы можем интеграл $Q^{(1)}(r)$ преобразовать к такому виду:

$$Q^{(1)}(r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(i\beta)\, K_2(\beta r)\, d\beta.$$

Функция $F(i\beta)$ переменного β удовлетворяет условиям предыдущего параграфа, благодаря чему мы можем найти асимптотическое разложение $Q^{(1)}(r)$ для больших r. Мы имеем:

$$F(i\beta) = \frac{ia^3}{8\varkappa^2\sigma^2} \beta^3 + \ldots;$$

отсюда асимптотическое разложение интеграла $Q^{(1)}(r)$ будет таким:

$$Q^{(1)}(r) = \frac{ia^3}{8\varkappa^2\sigma^2} \cdot \frac{\gamma_4}{r^4} + \ldots \tag{32}$$

Обратимся к рассмотрению интеграла $Q^{(2)}(r)$. Преобразуем этот интеграл к новому виду изменением пути интегрирования.

Первоначальный путь интеграции начинался в точке $\alpha = 0$, шел до точки $\alpha = h\sigma$ и переходил затем на верхний берег разреза $(h\sigma, \infty)$, определяемого функцией $\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}$; вдоль этого берега разреза рассматриваемый корень имеет положительные значения; начиная от точки $\alpha = \varkappa\sigma$ и до точки $\alpha = \infty$ корень $\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2}$ имеет также положительные значения. Присутствие под знаком интеграла функции $H_2^{(2)}(\alpha r)$ позволяет составить новый путь интеграции из мнимой полуоси от точки 0 до точки $-\infty i$, из участка $(\infty, h\sigma)$ действительной оси, проходимого по нижнему берегу каждого из разрезов многозначных функций $\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}$ и $\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2}$ и из участка $(h\sigma, \infty)$ той же оси и проходимого по верхнему берегу тех же разрезов.

В согласии с этим будем иметь:

$$Q^{(2)}(r) = i \int_0^{-\infty} F(i\beta) H_2^{(2)}(i\beta r)\, d\beta + \int_{\infty}^{h\sigma} + \int_{h\sigma}^{\infty}. \tag{33}$$

Изучим каждый из этих трех интегралов.

К первому интегралу может быть приложена формула асимптотического разложения, установленная в предыдущем параграфе. Мы имеем:

$$i \int_0^{-\infty} F(i\beta) H_2^{(2)}(i\beta r)\, d\beta = -\frac{a^3}{8\varkappa^2\sigma^2}\frac{\delta^4}{r^4} \ldots \tag{34}$$

Возьмем теперь второй интеграл правой части формулы (33). Мы можем записать этот интеграл так:

$$\int_{\infty}^{h\sigma} = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\varkappa\sigma} \frac{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2) J_3(\alpha a) H_2^{(2)}(\alpha r)\, d\alpha}{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2)^2 - 4\alpha^2\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2}\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}} + \\ + \frac{1}{2}\int_{\varkappa\sigma}^{h\sigma} \frac{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2) J_3(a\alpha) H_2^{(2)}(\alpha r)\, d\alpha}{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2)^2 + 4i\alpha^2\sqrt{\varkappa^2\sigma^2 - \alpha^2}\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}}. \tag{35}$$

Третий интеграл формулы (33) может быть преобразован к такому виду:

$$\int_{h\sigma}^{\infty} = \frac{1}{2}\int_{h\sigma}^{\varkappa\sigma} \frac{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2) J_3(a\alpha) H_2^{(2)}(\alpha r)\, d\alpha}{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2)^2 - 4i\alpha^2\sqrt{\varkappa^2\sigma^2 - \alpha^2}\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}} + \\ + \frac{1}{2}\int_{\varkappa\sigma}^{\infty} \frac{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2) J_3(a\alpha) H_2^{(2)}(\alpha r)\, d\alpha}{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2)^2 - 4\alpha^2\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2}\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}}.$$

Отсюда имеем

$$\int_{\infty}^{h\sigma} + \int_{h\sigma}^{\infty} = 4i\int_{h\sigma}^{\varkappa\sigma} \frac{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2) J_3(a\alpha) H_2^{(2)}(\alpha r)\, \alpha^2\sqrt{\varkappa^2\sigma^2 - \alpha^2}\sqrt{\alpha^2 - h^2\sigma^2}}{(2\alpha^2 - \varkappa^2\sigma^2)^4 + 16\alpha^4(\alpha^2 - h^2\sigma^2)(\varkappa^2\sigma^2 - \alpha^2)}\, d\alpha.$$

Для больших значений r можно $H_2^{(2)}(\alpha r)$ заменить ее асимптотическим выражением:

$$H_2^{(2)}(\alpha r) = +\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha r}}\, e^{-i\left(\alpha r - \frac{5}{4}\pi\right)}$$

Отсюда для больших r имеем:

$$\int_{\infty}^{h\sigma}+\int_{h\sigma}^{\infty}=4e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\int_{h\sigma}^{\kappa\sigma}\frac{(2\alpha^2-\kappa^2\sigma^2)\,\alpha^2\sqrt{\kappa^2\sigma^2-\alpha^2}\sqrt{\alpha^2-h^2\sigma^2}\,J_3(a\alpha)}{(2\alpha^2-\kappa^2\sigma^2)^4+16\alpha^4(\alpha^2-h^2\sigma^2)(\kappa^2\sigma^2-\alpha^2)}\cdot e^{-i\alpha r}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}.$$

Найдем асимптотическое разложение этого интеграла. С этой целью преобразуем путь интеграции $(h\sigma,\ \kappa\sigma)$, идущий по верхнему берегу разреза $(h\sigma,\ \infty)$ корня $\sqrt{\alpha^2-h^2\sigma^2}$, в путь интеграции, идущий по второму листу многозначной функции $\sqrt{\alpha^2-h^2\sigma^2}$ и состоящий из двух прямолинейных путей: $(h\sigma,\ h\sigma-\infty i)$ и $(\kappa\sigma-\infty i,\ \kappa\sigma)$. Мы получим:

$$\int_{\infty}^{h\sigma}+\int_{h\sigma}^{\infty}=4e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\left\{\int_{h\sigma}^{h\sigma-\infty i}+\int_{\kappa\sigma-\infty i}^{\kappa\sigma}\right\}.$$

Мы имеем:

$$\int_{h\sigma}^{h\sigma-\infty i}=e^{-\frac{3}{4}\pi i}\sqrt{\frac{\pi(\kappa^2-h^2)}{2r^3}}\cdot\frac{h^2J_3(ah\sigma)}{\sigma^3(2h^2-\kappa^2)^3}e^{-ih\sigma r},$$

$$\int_{\kappa\sigma-\infty i}^{\kappa\sigma}=e^{\frac{3}{4}\pi i}\sqrt{\frac{\pi(\kappa^2-h^2)}{2r^3}}\cdot\frac{J_3(a\kappa\sigma)}{\sigma^3\kappa^4}e^{-i\kappa\sigma r}.$$

Отсюда получим:

$$\int_{\infty}^{h\sigma}+\int_{h\sigma}^{\infty}=\frac{4}{\sigma^3}\frac{\sqrt{\kappa^2-h^2}}{r^2}\left\{\frac{1}{\kappa^4}J_3(a\kappa\sigma)\,e^{-i\left(\kappa\sigma r-\frac{1}{2}\pi\right)}-\frac{h^2}{(2h^2-\kappa^2)^3}J_3(ah\sigma)\,e^{-ih\sigma r}\right\}\quad(36)$$

Принимая теперь во внимание формулы (30) — (36), мы находим, наконец, следующее асимптотическое разложение потенциала Φ:

$$\Phi=-\frac{4aK}{\mu}\cdot\frac{\sqrt{\kappa^2-h^2}}{\sigma^3r^2}\left\{\frac{J_3(a\kappa\sigma)}{\kappa^4}e^{-i\left(\kappa\sigma r-2\varphi-\sigma t-\frac{1}{2}\pi\right)}-\frac{h^2J_3(ah\sigma)}{(2h^2-\kappa^2)^3}e^{-i(h\sigma r-2\varphi-\sigma t)}\right\}.$$

С помощью этого выражения для Φ мы получаем значения смещений при распространении продольной волны:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{4aK}{\mu}\cdot\frac{\sqrt{\kappa^2-h^2}}{\sigma^2r^2}\left\{\frac{h^3J_3(ah\sigma)}{(2h^2-\kappa^2)^3}e^{-i\left(h\sigma r-2\varphi-\sigma t-\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{J_3(a\kappa\sigma)}{\kappa^3}e^{-i(\kappa\sigma r-2\varphi-\sigma t)}\right\}.$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=\frac{8aK}{\mu}\cdot\frac{\sqrt{\kappa^2-h^2}}{\sigma^3r^3}\left\{-\frac{J_3(a\kappa\sigma)}{\kappa^4}e^{-i(\kappa\sigma r-2\varphi-\sigma t)}+\frac{h^2J_3(ah\sigma)}{(2h^2-\kappa^2)^3}e^{-i\left(h\sigma r-2\varphi-\sigma t+\frac{\Omega}{2}\right)}\right\}.$$

Из общей формулы (19), определяющей Φ при любом z, можно найти смещение $-\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ для $z=0$; мы имеем для больших r:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{4aK}{\mu}\frac{1}{\sigma^2r^2}\left\{\frac{\kappa^2-h^2}{\kappa^4}J_3(a\kappa\sigma)\,e^{-i\left(\kappa\sigma r-2\varphi-\sigma t-\frac{1}{2}\pi\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{J_3(ah\sigma)}{4(2h^2-\kappa^2)}e^{-i\left(h\sigma r-2\varphi-\sigma t-\frac{1}{2}\pi\right)}\right\}.$$

Пользуясь общими формулами (19), можно найти смещения u', v', w' в точках плоскости $z = 0$ для больших значений r.

Соответствующие асимптотические формулы были найдены, по нашей просьбе, С. С. Войтом, которому автор весьма признателен за оказанную помощь в работе.

Мы имеем:

$$u' = -\frac{2aK}{\mu}\frac{\sqrt{\varkappa^2-h^2}}{\sigma^2 r^2}\left\{\frac{J_3(a\varkappa\sigma)}{\varkappa^3}e^{-i\varkappa\sigma r} + \frac{hJ_3(ah\sigma)}{(2h^2-\varkappa^2)^2}e^{-i\left(h\sigma r-\frac{1}{2}\pi\right)}\right\}e^{i(\sigma t+2\varphi)},$$

$$v' = \frac{4aK}{\mu}\frac{\sqrt{\varkappa^2-h^2}}{\sigma^3 r^3}\left\{\frac{J_3(a\varkappa\sigma)}{\varkappa^4}e^{-i\varkappa\sigma r} + \frac{J_3(ah\sigma)}{(2h^2-\varkappa^2)^2}e^{-i\left(h\sigma r-\frac{1}{2}\pi\right)}\right\}e^{i(\sigma t+2\varphi)},$$

$$w' = \frac{4aK}{\mu}\frac{1}{\sigma^2 r^2}\left\{\frac{2(\varkappa^2-h^2)J_3(a\varkappa\sigma)}{\varkappa^4}e^{-i\left(\varkappa\sigma r+\frac{1}{2}\pi\right)} + \frac{h^2 J_3(ah\sigma)}{2(2h^2-\varkappa^2)^2}e^{-i\left(h\sigma r+\frac{1}{2}\pi\right)}\right\}e^{i(\sigma t+2\varphi)}.$$

С помощью всех этих формул мы находим следующие полные значения упругих смещений при больших r:

$$u = \frac{2aK}{\mu}\frac{\sqrt{\varkappa^2-h^2}}{\sigma^2}\left\{\frac{h\varkappa^2}{(2h^2-\varkappa^2)^3}J_3(ah\sigma)\cdot e^{-i\left(h\sigma r-\frac{1}{2}\pi\right)} - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{\varkappa^3}J_3(a\varkappa\sigma)e^{-i\varkappa\sigma r}\right\}\cdot\frac{e^{i(\sigma t+2\varphi)}}{r^2},$$
$$v = 0,$$
$$w = \frac{4aK}{\mu}\frac{1}{\sigma^2}\left\{\frac{\varkappa^2}{4(2h^2-\varkappa^2)^2}J_3(ah\sigma)\,e^{-i\left(h\sigma r+\frac{1}{2}\pi\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa^2-h^2}{\varkappa^4}J_3(a\varkappa\sigma)\,e^{-i\left(\varkappa\sigma r+\frac{1}{2}\pi\right)}\right\}\frac{e^{i(\sigma t+2\varphi)}}{r^2}.$$

Эти смещения складываются из смещений, определяемых проходящими продольными и поперечными волнами; с возрастанием r они быстро убывают.

Представлено 14. X 1954

QA
927
S744

Sretenskiĭ, Leonid Nikolaevich
Rasprostranenie voln v uprugom poluprostranstve...

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY